

ΘΕΜΑ 1.

α) Υλικό σημείο μάζας m κινείται στον άξονα $x'Ox$ υπό την επίδραση του δυναμικού $V=V(x)$. Αν για $t=t_0$ βρίσκεται στη θέση $x=x_0$ με ενέργεια E , δείξτε ότι η κίνησή του δίνεται από τη σχέση

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \sqrt{(E - V(x))^{-1}} dx$$

(Προσοχή: Να ορίσετε την κάθε ποσότητα που χρησιμοποιείται και να περιγράψετε το κάθε βήμα της αποδεικτικής διαδικασίας)

β) Υλικό σημείο μάζας m κινείται στον άξονα Ox υπό την επίδραση του δυναμικού $V = -\frac{k}{2x^2}$, $k > 0$. Αν για $t=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x=a>0$ με ταχύτητα $\dot{x}=0$, να βρεθεί ο χρόνος στον οποίο το σώμα θα φτάσει στο σημείο O .
 γ) Είναι η κίνηση περιοδική; Αν ναι βρείτε την περίοδό της

Λύση

α) Έστω ότι μια τυχούσα χρονική στιγμή t το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση x με ταχύτητα $\dot{x}$. Η ενεργεία του E διατηρείται σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησης. Από τον ορισμό της ενέργειας έχουμε

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V)} \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{m}{2(E - V)}} dx \quad (1)$$

όπου το θετικό πρόσημο ισχύει όταν η κίνηση γίνεται προς τα δεξιά (θετική ταχύτητα) και το αρνητικό για την αντίθετη κατεύθυνση.

Ολοκληρώνουμε την (1) για την κίνηση από τη θέση $x_0 = x(t_0)$ έως την τυχούσα θέση $x = x(t)$ και παίρνουμε το ζητούμενο

$$\int_{t_0}^t dt = \pm \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{m}{2(E - V)}} dx = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \sqrt{(E - V)^{-1}} dx$$

β) Έστω τ ο χρόνος για να φτάσει το σώμα στο O . Η κίνηση γίνεται με ενέργεια

$E = -\frac{k}{2a^2}$ (ενέργεια στην αρχική θέση). Εφαρμόζουμε τον τύπο της σχέσης του θέματος

(α) με $t_0 = 0$, $x_0 = a$, $t = \tau$, $x = 0$ και το πρόσημο μείον, αφού η κίνηση γίνεται από το $x = a > 0$ προς το O (η δύναμη είναι ελκτική προς το O):

$$\tau = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{2a^2} + \frac{k}{2x^2}}} = -a \sqrt{\frac{m}{k}} \int_a^0 \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\sqrt{a^2 - x^2} \right]_a^0 \Rightarrow \boxed{\tau = a^2 \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

γ) Το δυναμικό είναι άρτια συνάρτηση συνεπώς η κίνηση είναι η ίδια στον θετικό και στον αρνητικό ημιάξονα. Το σώμα λοιπόν θα φτάσει μέχρι την θέση $x = -a$ και ο χρόνος

που θα χρειαστεί να διανύσει το διάστημα από το Ο στο $x = -a$ θα είναι επίσης ίσος με $a^2 \sqrt{k/m}$. Η κίνηση λοιπόν είναι περατωμένη και (συνεπώς) περιοδική. Άρα η συνολική περίοδος της κίνησης θα είναι $T = 4\tau = 4a^2 \sqrt{k/m}$

Επίσης θα μπορούσαμε να βρούμε τα όρια της κίνησης (προκύπτει εύκολα ότι $-a \leq x \leq a$) και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε κατάλληλα τη σχέση του θέματος (α),

$$\text{δηλαδή } T/2 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-a}^a \sqrt{(E-V)^{-1}}$$

Σημείωση. Κάποιος θα μπορούσε να αμφισβητήσει την περιοδικότητα της κίνησης δεδομένου ότι στο $x=0$ το δυναμικό γίνεται άπειρο. Και μια τέτοια αμφισβήτηση θα αξιολογηθεί θετικά.

ΘΕΜΑ 2.

Διαστημικό σκάφος μάζας m κινείται γύρω από τη Γη (που τη θεωρούμε ακίνητη) σε ελλειπτική τροχιά με εκκεντρότητα $e=0.5$ και μεγάλο ημιάξονα a . Τη στιγμή $t=0$ το σκάφος περνάει από το περίκεντρο της τροχιάς του με ταχύτητα v_0 .

(α) Πόσο πρέπει να αυξήσουμε το μέτρο της ταχύτητας του σκάφους σε σχέση με τη v_0 ώστε η τροχιά του να γίνει παραβολική;

(β) Πάνω στη παραβολική τροχιά, σε πόση απόσταση, σε σχέση με την αρχική, θα βρίσκεται το σκάφος όταν η ταχύτητά του ξαναγίνει ίση με v_0 ;

γ) Πόση θα είναι η στροφορμή του σκάφους ως προς τη Γη στην παραπάνω απόσταση;

Λύση

α) Το περίκεντρο της ελλειπτικής τροχιάς βρίσκεται σε απόσταση $r_0 = a(1-e) = a/2$ με

$$\text{ταχύτητα } v_0^2 = \frac{GMm}{m} \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{3GM}{a}}.$$

Για να έχουμε στο $r = r_0$ παραβολική τροχιά πρέπει η ταχύτητα v_0' να είναι τέτοια ώστε $E=0$. Άρα

$$\frac{1}{2} m v_0'^2 - \frac{GMm}{r_0} = 0 \Rightarrow v_0' = 2\sqrt{\frac{GM}{a}} \quad \text{ή} \quad v_0' = \frac{2}{\sqrt{3}} v_0 \approx 1.15 v_0 \quad (\text{δηλαδή αύξηση } 15\%)$$

β) Έστω σημείο της παραβολικής τροχιάς σε απόσταση r' με ταχύτητα v_0 . Θα είναι

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r'} = 0 \Rightarrow r' = \frac{2GMm}{m v_0^2} = \frac{2GM}{m 3GM/a} = \frac{2}{3} a \quad \text{ή} \quad r' = \frac{4}{3} r_0$$

γ) Η στροφορμή θα είναι ίδια με αυτή της αρχικής θέσης (για την παραβολική τροχιά)

$$\text{όπου } r = r_0 = a/2, \quad v = v_0 = 2\sqrt{\frac{GM}{a}} \quad \text{και} \quad \vec{r} \perp \vec{v} \quad (\text{περίκεντρο}). \quad \text{Άρα } L = mrv = m\sqrt{GMa}$$

ΘΕΜΑ 3.

(α) Να δείξετε ότι σε πεδίο ελκτικών δυνάμεων $F(r)$ ένα σώμα μάζας m μπορεί πάντοτε να εκτελέσει κυκλική κίνηση ακτίνας r_0 με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Δείξτε επίσης ότι η ταχύτητα u της κυκλικής τροχιάς δίνεται από τη σχέση

$$u^2 = -\frac{r_0 F(r_0)}{m}.$$

(β) Υλικό σημείο μάζας $m=1$ κινείται στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F(r) = -\frac{202530}{r^5}$.

Κάποια χρονική στιγμή βρίσκεται στη θέση $\vec{r}_1 = -6\hat{i} + 7\hat{j} - \hat{k}$ και η ταχύτητα του είναι $\vec{u}_1 = \frac{1}{86}(4\hat{i} + 67\hat{j} + 445\hat{k})$. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του όταν βρεθεί στη θέση $\vec{r}_2 = 5\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$

Λύση

(α) Από τη διαφορική εξίσωση $m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = F(r)$ που περιγράφει την κίνηση ενός σώματος m σε πεδίο ελκτικών δυνάμεων $F(r)$ ως προς την ακτίνα του r , βλέπουμε ότι τα σημεία ισορροπίας της αντιστοιχούν σε κυκλική κίνηση. Τα σημεία ισορροπίας r_0

βρίσκονται από τη λύσης της εξίσωσης $m\ddot{r} = 0 \Rightarrow F(r) + \frac{L^2}{mr^3} = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει πάντα λύση αν $F(r) < 0$, όταν δηλαδή έχουμε ελκτική δύναμη. Η γωνιακή ταχύτητα της κίνησης είναι $\dot{\theta} = \omega = \frac{L}{mr_0^2}$, δηλαδή σταθερή. Για την ταχύτητα της κίνησης έχουμε

$$u = r_0 \omega = r_0 \frac{L}{mr_0^2} = \frac{L}{mr_0} \Rightarrow u^2 = \frac{L^2}{m^2 r_0^2} = -\frac{r_0}{m} \left(-\frac{L^2}{mr_0^3} \right) = -\frac{r_0}{m} F(r_0).$$

(β) Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2} m u_1^2 + V(r_1) = \frac{1}{2} m u_2^2 + V(r_2).$$

Επειδή $r_1 = \sqrt{(-6)^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{86}$ και $r_2 = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{86}$ έχουμε

$r_1 = r_2 \Rightarrow V(r_1) = V(r_2)$, οπότε και $\frac{1}{2} m u_1^2 = \frac{1}{2} m u_2^2$. Επομένως

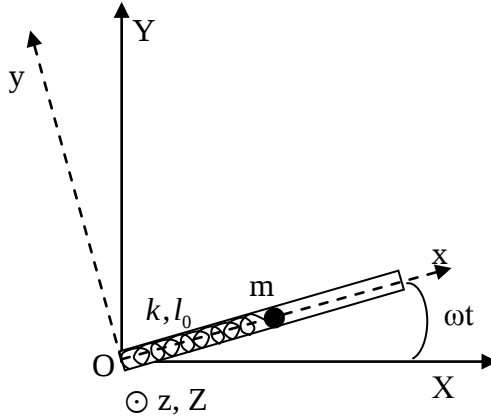
$$u_2 = u_1 = \frac{1}{86} \sqrt{4^2 + 67^2 + 445^2} = \frac{\sqrt{202530}}{86}.$$

ΘΕΜΑ 4.

Υλικό σημείο μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς τριβή μέσα σε οριζόντιο σωλήνα ο οποίος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από σημείο O του σωλήνα. Το υλικό σημείο βρίσκεται στο ένα άκρο ελατηρίου (που βρίσκεται μέσα στο σωλήνα) φυσικού μήκους l_0 και σταθεράς $k = 2m\omega^2$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι σταθερά συνδεδεμένο στο σημείο O . Αν για $t = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται σε απόσταση l_0 από το O και έχει ταχύτητα ίση με μηδέν (ως προς το σωλήνα), να βρεθεί η κίνηση του υλικού σημείου και οι αντιδράσεις του σωλήνα.

Λύση

Έστω $OXYZ$ αδρανειακό σύστημα αξόνων, και $Oxyz$ περιστρεφόμενο (μη αδρανειακό) σύστημα με μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ όπως φαίνονται στο σχήμα. Τα δύο συστήματα συντεταγμένων ταυτίζονται για $t = 0$.



Η διαφορική εξίσωση της κίνησης του σημείου είναι:

$$m\vec{\gamma}_\sigma = \vec{F} - m\vec{\gamma}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{u}_\sigma$$

όπου $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{u}_\sigma = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$, $\vec{\gamma}_\sigma = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$, $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$, και $y = \dot{y} = \ddot{y} = z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$.

Υπολογίζουμε τους όρους που εμφανίζονται στην παραπάνω εξίσωση.

Επειδή οι αρχές των δύο συστημάτων συντεταγμένων ταυτίζονται έχουμε $\vec{\gamma}_0 = \vec{0}$.

Επειδή η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή έχουμε $\dot{\vec{\omega}} = 0 \Rightarrow m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = 0$.

Η δύναμη $\vec{F}$ είναι το άθροισμα του βάρους $\vec{B} = -mg\hat{k}$, της αντίδρασης $\vec{R} = R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$

και της δύναμης του ελατηρίου $F_1 = -k(x - l_0)\hat{i}$.

$$\text{Έχουμε } \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega x \hat{j} \text{ } \text{οπότε } \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega x & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 x \hat{i}.$$

$$\text{Επίσης } \vec{\omega} \times \vec{u}_\sigma = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega \dot{x} \hat{j}.$$

Αντικαθιστώντας όλες αυτές τις σχέσεις στην αρχική διαφορική εξίσωση και παίρνοντας τις συνιστώσες των διανυσμάτων στους άξονες x, y, z , καταλήγουμε στις ακόλουθες 3 εξισώσεις

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k(x - l_0) + m\omega^2 x, \\ m\ddot{y} = 0 = R_y - 2m\omega\dot{x}, \\ m\ddot{z} = 0 = -mg + R_z. \end{cases}$$

Από την πρώτη παίρνουμε

$$\ddot{x} - \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) x = \frac{kl_0}{m} \stackrel{k=2m\omega^2}{\Rightarrow} \ddot{x} + \omega^2 x = 2\omega^2 l_0.$$

Η λύση της ομογενούς $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, έχει τη μορφή $x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, ενώ ψάχνοντας για μια μερική λύση της μη ομογενούς της μορφής $y = C$ βρίσκουμε $C = 2l_0$. Επομένως η γενική λύση είναι η

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + 2l_0,$$

όπου οι σταθερές A, B καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Γνωρίζουμε ότι για $t = 0$ έχουμε $x = l_0, \dot{x} = 0$. Βάζοντας αυτές τις ιδιότητες στις σχέσεις

$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + 2l_0$ και $\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$, βρίσκουμε $A = -l_0$ και $B = 0$, οπότε η λύση είναι:

$$x = -l_0 \cos(\omega t) + 2l_0.$$

Από τη δεύτερη διαφορική εξίσωση βρίσκουμε

$$R_y = 2m\omega\dot{x} = 2m\omega l_0 \omega \sin(\omega t) \Rightarrow R_y = 2m\omega^2 l_0 \sin(\omega t) = kl_0 \sin(\omega t),$$

ενώ η τρίτη μας δίνει

$$R_z = mg.$$